

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

«РОБОТА З НАДБУДОВОЮ Solver MS Excel»
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи студентів
з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі»
для студентів денної та заочної форм навчання
спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 17.05.2019 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2019

«РОБОТА З НАДБУДОВОЮ Solver MS Excel». Методичні вказівки до самостійної роботи студентів з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» / уклад.: О. В. Замула, О. О. Замула. – Харків: НТУ «ХП», 2019. – 30 с.

Укладачі: О. В. Замула
О. О. Замула

Рецензент О.Ю. Лінькова

Кафедра міжнародного бізнесу та фінансів

ВСТУП

У даному виданні розглянуто надбудову Solver MS Excel, яка використовується для знаходження оптимального розв'язку задач лінійного, нелінійного, випуклого, цілочислового, бінарного програмування, а також для проведення аналізу чутливості задач лінійного програмування.

Спочатку викладаються необхідні теоретичні відомості стосовно задач оптимального плану випуску продукції за обмежених ресурсів. Потім розглядаються різні способи запису математичної моделі в електронній таблиці Excel. Далі проводиться аналіз чутливості на основі звітів, які формує надбудова Solver.

Наприкінці методичних вказівок запропоновано розв'язати моделі задач лінійного програмування за допомогою надбудови Solver.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ОПТИМАЛЬНИЙ ПЛАН ВИПУСКУ ПРОДУКЦІЇ

Фірма виготовляє три види продукції P_1, P_2, P_3 . Для їхнього виробництва використовуються декілька видів ресурсів, три з яких є обмеженими. Позначимо їх R_1, R_2, R_3 . Кожний з цих ресурсів доступний у звітний період у кількості b_1, b_2, b_3 відповідно. Для виготовлення j -го виду продукції необхідно a_{ij} одиниць i -го виду ресурсу. Відомо, що прибуток від реалізації одиниці j -го виду продукції становить c_j умовних грошових одиниць. Параметри даного виробництва зведено у табл. 1 Знайти такий план випуску продукції, який забезпечить фірмі найбільший прибуток.

Таблиця 1 – Параметри виробництва

c_1	c_2	c_3	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3

Вихідні дані наведено у табл. 2, з розміщенням значень параметрів виробництва відповідно до місць у табл. 1.

Таблиця 2 – Значення параметрів виробництва

1	4	3	
5	0	2	400
1	2	4	200
1	4	0	300

Необхідно:

- 1) скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним, за умови обмеженості ресурсів R_1, R_2, R_3 ;
- 2) використовуючи тіньові ціни, з'ясувати, як зміниться прибуток, якщо загальна кількість ресурсів R_1 і R_2 збільшиться на 10 % кожний, а загальна кількість ресурсу R_3 зменшиться на 5 % .

2. ФОРМУЛЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ

Невідомими величинами є кількість продукції, відповідно Π_1 , Π_2 , Π_3 , яку необхідно випускати для отримання максимального прибутку. Позначимо їх x_j , $j = 1..3$, де j відповідає номеру продукції.

Оскільки на одиницю продукції Π_1 необхідно витратити 5 одиниць ресурсу P_1 і на одиницю продукції Π_3 необхідно витратити 2 одиниці цього ж ресурсу (виготовлення продукції Π_2 не потребує використання цього ресурсу), то для виготовлення цієї продукції у кількості x_1 і x_3 буде потрібно $(5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3)$ одиниць ресурсу P_1 . Так само записуємо вирази для споживання інших ресурсів: $(1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3)$ одиниць ресурсу P_2 , $(1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2)$ одиниць ресурсу P_3 . Оскільки споживання ресурсів P_1 , P_2 , P_3 не повинне перевищувати їх запасів (відповідно 400, 200, 300 одиниць), то зв'язок між споживанням ресурсів і їх запасами запишеться системою нерівностей:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_3 \leq 400 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 200 \\ x_1 + 4x_2 \leq 300. \end{cases}$$

За логікою задачі змінні x_1 , x_2 , x_3 мають бути невід'ємними:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Оскільки прибуток, одержуваний від одиниці продукції Π_1 , Π_2 , Π_3 , за умовою задачі становить 1, 4 і 3 грн відповідно, то прибуток від реалізації продукції Π_1 у кількості x_1 становить $1 \cdot x_1$ грн, від реалізації продукції Π_2 у кількості x_2 становить $4 \cdot x_2$ грн, від реалізації продукції Π_3 у кількості x_3 становить $3 \cdot x_3$ грн, тобто сумарний прибуток (позначимо його як величину Z , яку необхідно максимізувати) запишеться так:

$$Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max.$$

Отже, зібравши усі ці вирази до купи, запишемо математичну модель задачі:

$$Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_3 \leq 400 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 200 \\ x_1 + 4x_2 \leq 300 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3. ПЕРШИЙ СПОСІБ ЗАПISУ МОДЕЛІ в Excel

Залежно від версії Excel, а також мови інтерфейсу назва надбудови Solver може різнитися. Так, наприклад, в українській версії MS Excel 2010 дана надбудова називається «Розв’язувач» і надалі використовуємо саме цю назву.

Запишемо лише ті елементи математичної моделі задачі, які мінімально необхідні для розв’язання за допомогою надбудови «Розв’язувач». Усі вони розміщуються у чотирьох окремих клітинках, як це показано на рис. 1.

Важливим моментом є резервування клітинок на аркуші під значення змінних (у нашому випадку – це змінні x_1, x_2, x_3). **До таких клітинок є єдина вимога: їх не можна чіпати.** Нехай у нашому прикладі це будуть клітинки A1:A3.

Для запису виразів тут використовується посилання на клітинки A1:A3, які асоційовані зі змінними x_1, x_2, x_3 . В рядку формул показано вираз для цільової функції в клітинці B1

$$=A1+4*A2+3*A3$$

Тут і надалі використовується символ «*», який в Excel слугує за операцію множення, і на відміну від символічного запису ніколи не опускається.

В клітинках C1:C3 записані вирази для лівих частин обмежень

$$=5*A1+2*A3 \quad (\text{клітинка C1})$$

$$=A1+2*A2+4*A3 \quad (\text{клітинка C2})$$

$$=A1+4*A2 \quad (\text{клітинка C3})$$

B1		fx		=A1+4*A2+3*A3	
	A	B	C	D	E
1		0	0		
2			0		
3			0		
4					

Рисунок 1 – Вигляд робочого аркуша зі складовими моделі

На робочому аркуші не вистачає правих частин функціональних обмежень; не вказано обмежень змінних на знак, напрямок оптимізації (максимізація або мінімізація) і тип для кожного функціонального обмеження. В MS Excel для введення цієї інформації з подальшим розв'язанням моделі передбачена надбудова «Розв'язувач» (*Solver* в оригінальній версії).

Для активації надбудови Solver (Розв'язувач) MS Excel версії 2010 року (у версії 2007 року і у більш пізніх версіях активація відбувається подібним чином) спочатку необхідно зайти в меню «Файл» і обрати пункт «Параметри» (рис. 2).

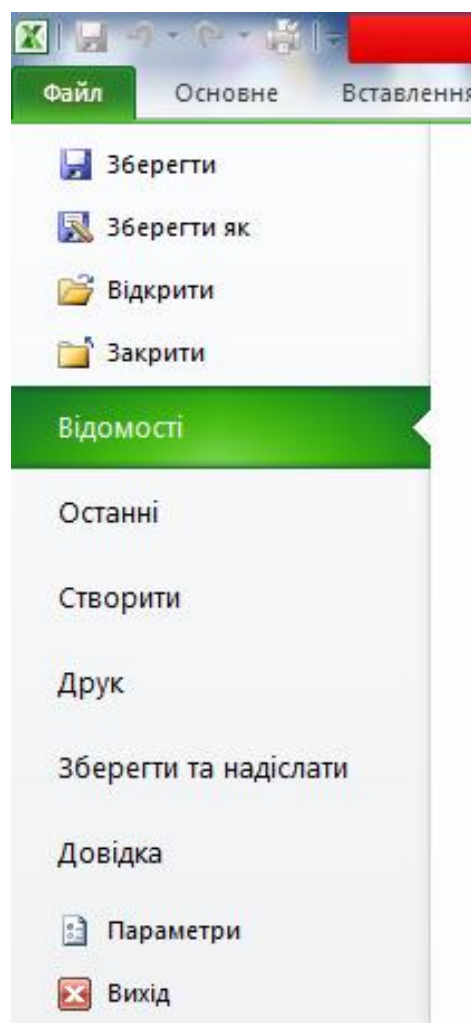


Рисунок 2 – Команди меню файл

У лівій частині вікна, що з'явиться, обрати команду «Надбудови». Після цього внизу вікна натиснути кнопку «Перейти...» (рис. 3).

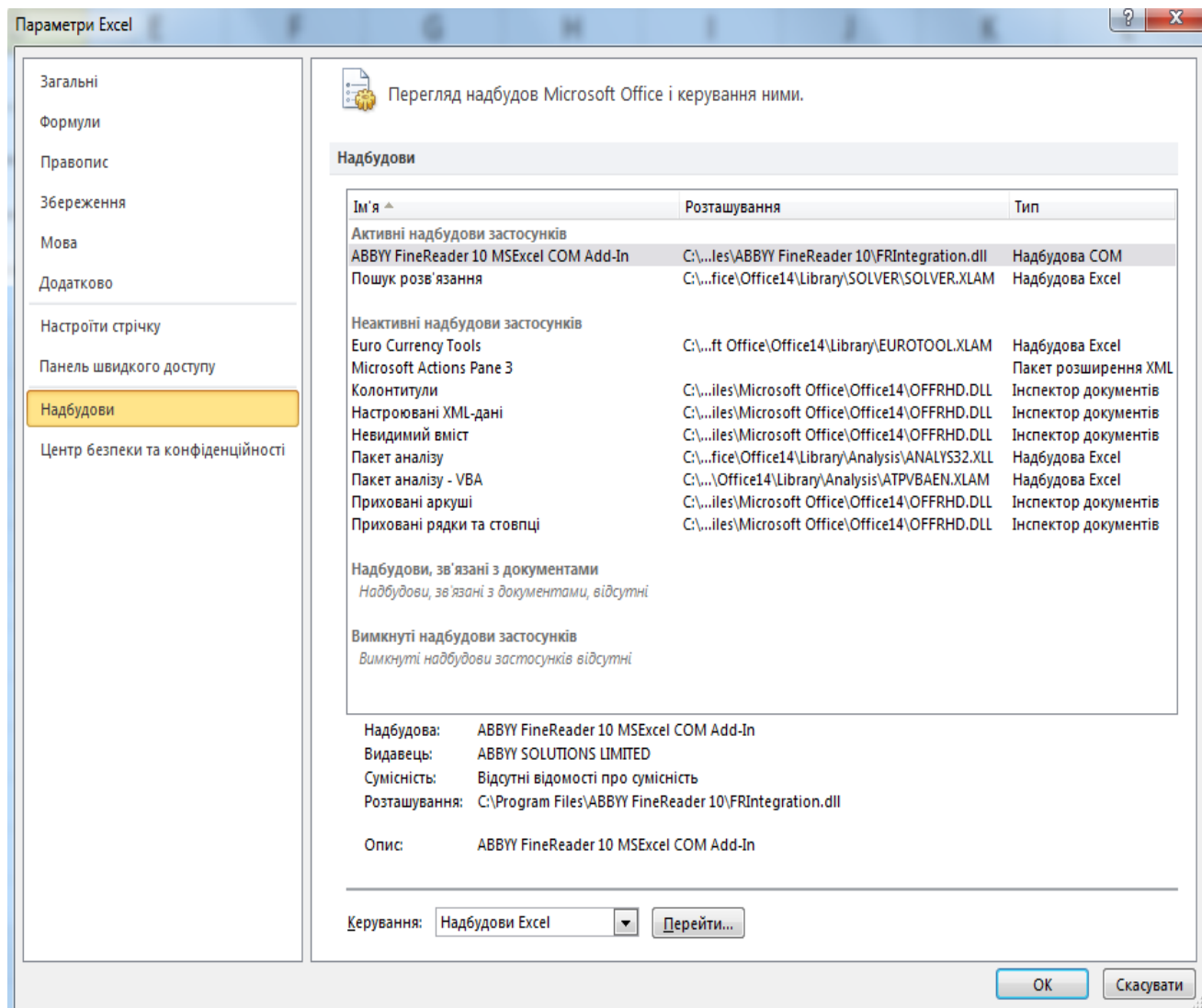


Рисунок 3 – Вікно для роботи з параметрами Excel

В результаті з'явиться вікно (рис. 4), в якому необхідно відмітити потрібний квадрат навпроти назви надбудови «Пошук розв'язання». Підтвердити вибір необхідно натисканням кнопки «ОК».

Після того як надбудова підключена, для її виклику в стрічці меню «Дані» крайньою праворуч з'явиться піктограма «Розв'язувач» (рис. 5).

З цього моменту можна викликати діалогове вікно надбудови «Розв'язувач» і ввести ту інформацію щодо моделі, якої не вистачає на робочому аркуші.

Звертаємо вашу увагу на те, що у різних версіях Excel ця надбудова має невеликі відмінності не лише у інтерфейсі, але і у назві.

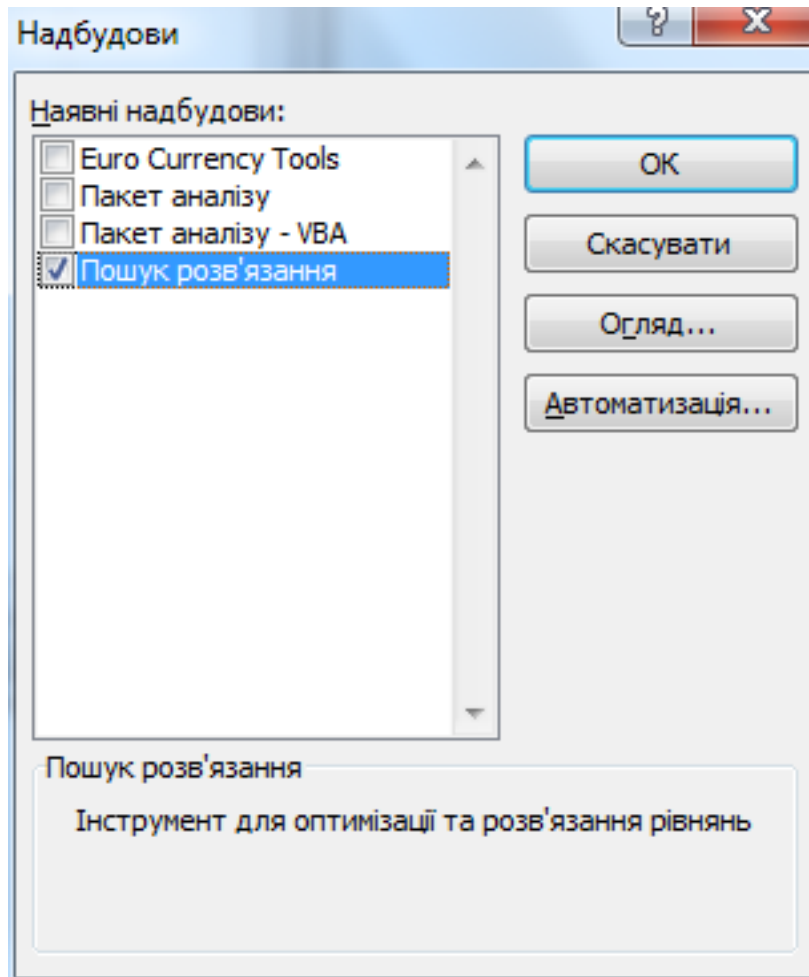


Рисунок 4 – Вікно з вибором надбудов

На перший погляд, запис моделі у вигляді, як це показано на рис. 1, є найбільш зручним – немає нічого зайвого, проте це єдина перевага такого підходу, який має багато недоліків. А саме:

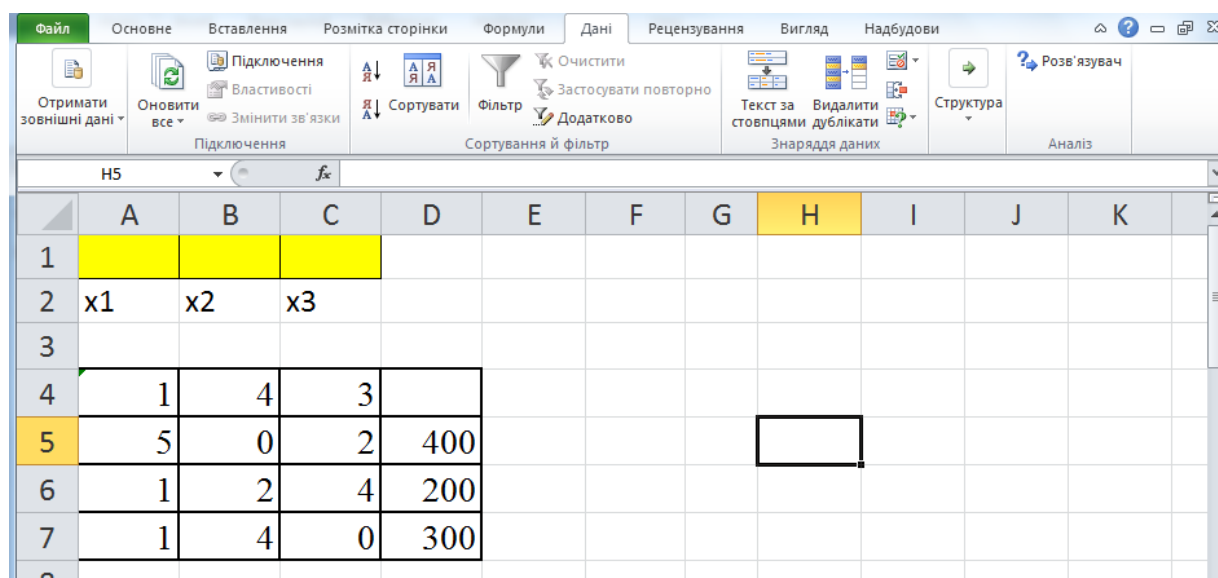
- відсутність будь-якої допоміжної інформації ускладнює роботу з моделлю;
- з часом встановити відповідність між клітинками і виразами буде вкрай складно;
- зміна параметрів моделі потребує зміни у формулах, а у випадку зі зміною правих частин обмежень необхідно їх заново вводити у діалоговому вікні надбудови;
- складно виявляти допущені помилки;
- важко формувати самі вирази на робочому аркуші.

Тому для формування математичної моделі на робочому аркуші застосовується інший підхід, який описано нижче.

4. ДРУГИЙ СПОСІБ ЗАПISУ МОДЕЛІ в Excel

Введемо параметри моделі, наприклад, у клітинках A4:C7, D5:D7 та «зарезервуємо» місце для змінних моделі – нехай це будуть клітинки A1:C1. Також бажано їх виділити, наприклад, кольором, і зробити відповідний підпис (в A2:C2) під кожною «зарезервованою» клітинкою. Тепер клітинки A1:C1 у нас будуть асоціюватися зі змінними x_1, x_2, x_3 . Результат відображено на рис. 5.

Звертаємо вашу увагу на те, що підключення надбудови відбувається так само, як це описано для першого способу.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	x1	x2	x3								
3											
4	1	4	3								
5	5	0	2	400							
6	1	2	4	200							
7	1	4	0	300							
8											

Рисунок 5 – Робочий аркуш Excel з параметрами моделі

Для формування компонентів математичної моделі – цільової функції та обмежень – необхідно записати вирази для цільової функції, для лівих і правих частин обмежень. Оскільки структурно вираз для цільової функції і ліві частини обмежень є подібними, можна записати для них єдину формулу, наприклад, у клітинці F4:

$$=A4*\$A\$1+B4*\$B\$1+C4*\$C\$1$$

або за допомогою функції Excel SUMPRODUCT, що додає добутки відповідних елементів двох масивів (рис. 6) і дає той самий результат.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	x1	x2	x3							
3										
4	1	4	3			=SUMPRODUCT(\$A\$1:\$C\$1;A4:C4)				
5	5	0	2	400						
6	1	2	4	200						
7	1	4	0	300						

Рисунок 6 – Запис виразу для цільової функції

Введену формулу достатньо скопіювати у три нижні клітинки (F5:F7). Для цього потрібно не забути про знак \$ перед номером рядка і стовпчика для A1:C1. Можна продублювати праву частину обмежень праворуч від лівих частин для покращення сприйняття введенної інформації як цілісної моделі, та вказати тип обмеження між лівою та правою частинами а також напрям оптимізації, наприклад, у G4:G7. Результат показано на рис. 7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	x1	x2	x3						
3									
4	1	4	3			0 max			
5	5	0	2	400		0 <=	400		
6	1	2	4	200		0 <=	200		
7	1	4	0	300		0 <=	300		
8									

Рисунок 7 – Робочий аркуш Excel з компонентами моделі

Надбудова використовує лише клітинки F4:F7 і H5:H7. Для формування виразів у них як коефіцієнти при невідомих використовуються значення в клітинках A4:C4 і A5:D7. Записи в інших клітинках є необов'язковими для пода-

льшого розв'язання, проте вони допомагають користувачу краще орієнтуватися в робочій області Excel.

Після того як дані введено і записано вирази для обмежень і цільової функції, натискаємо на піктограму «Розв'язувач» в меню «Дані», після чого з'являється діалогове вікно надбудови (рис. 8).

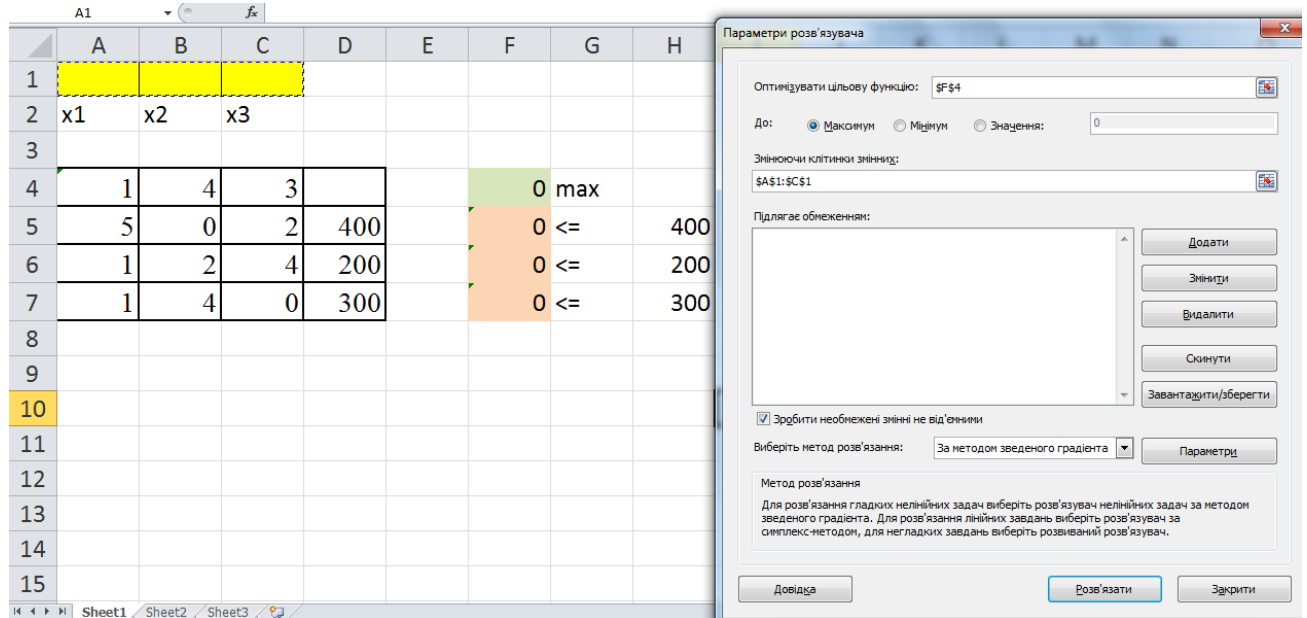


Рисунок 8 – Діалогове вікно надбудови «Пошук розв'язання»

У верхній частині вікна в полі «Оптимізувати цільову функцію» вказується клітинка, в якій записано вираз для цільової функції. Оскільки робоче поле аркуша Excel є доступним з діалогового вікна, потрібну клітинку (F4) можна вказати, клацнувши на ній лівою кнопкою «миші». Але можна ввести її також за допомогою клавіатури.

Нижче від цього поля обирається тип оптимізації. У нашому випадку це «Максимум». У полі «Змінюючи клітинки змінних» вказуємо клітинки, які «за-резервовано» під змінні (A1:C1).

Для додавання обмежень необхідно натиснути на кнопку «Додати». Після цього з'явиться діалогове вікно, таке, як на рис. 9. У полі «Посилання на клітинку» вказується ліва частина першого обмеження (F5), а у полі «Обмеження» – права частина (H5). У загальному випадку допускається, що права частина може бути виразом.

У поле «Обмеження» безпосередньо можна вводити праву частину обмеження, неважливо, чи це функціональне обмеження, чи обмеження на знак. Проте, варіант, коли вводиться саме число, а не посилання на клітинку, краще використовувати лише у випадку, коли необхідно задати умову невід’ємності для змінної ($x \geq 0$).

Зі списку, що знаходиться в центральній частині діалогового вікна, обираємо потрібний тип обмеження (\leq).

Для додавання кожного нового обмеження необхідно натискати кнопку «Додати» цього діалогового вікна. По завершенні введення всіх обмежень необхідно натиснути кнопку «ОК».

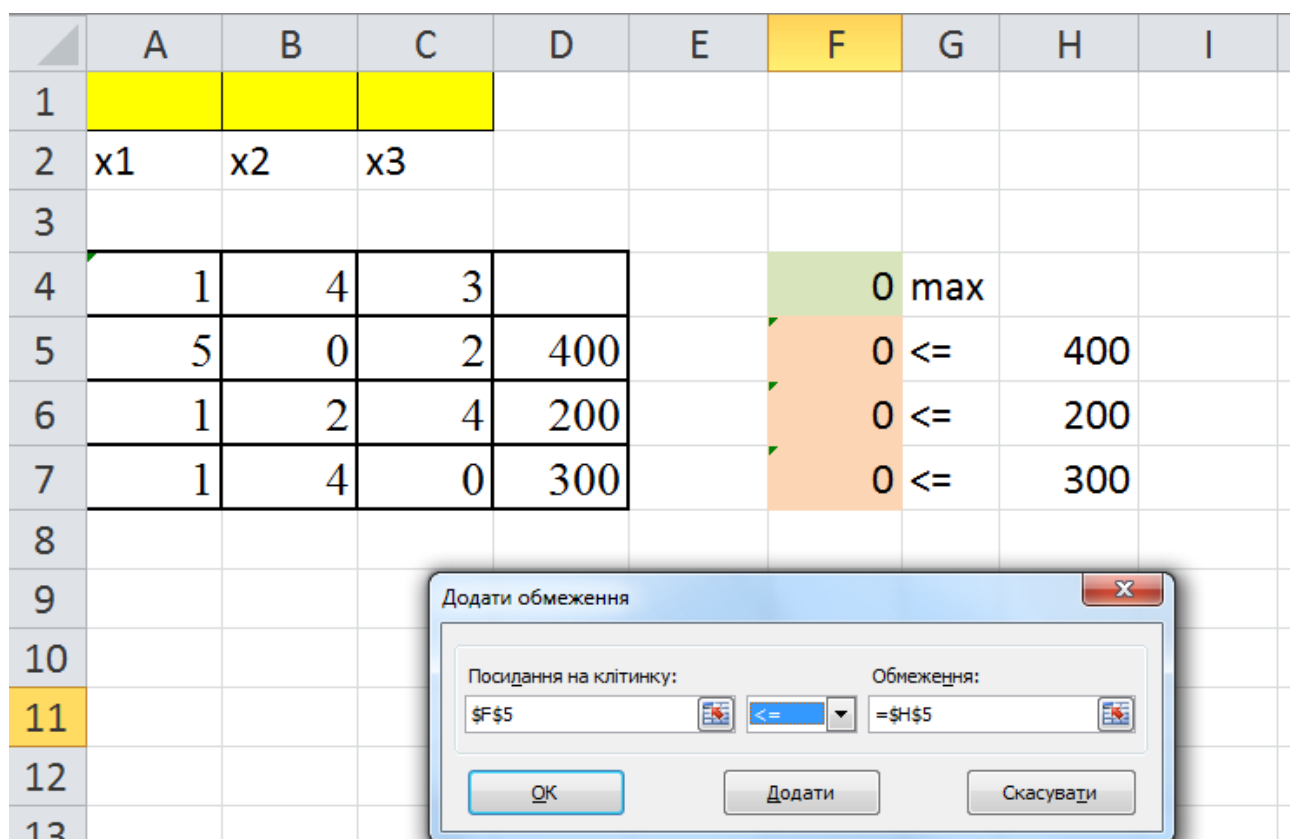


Рисунок 9 – Додавання обмеження у діалоговому вікні «Розв’язувача»

Для однотипних обмежень (у нашому випадку усі функціональні обмеження мають тип \leq) можна виділити усі сусідні ліві частини обмежень (F5:F7) у полі «Посилання на клітинку» і усі праві частини (H5:H7) у полі «Обмеження», так, як це показано на рис. 10.

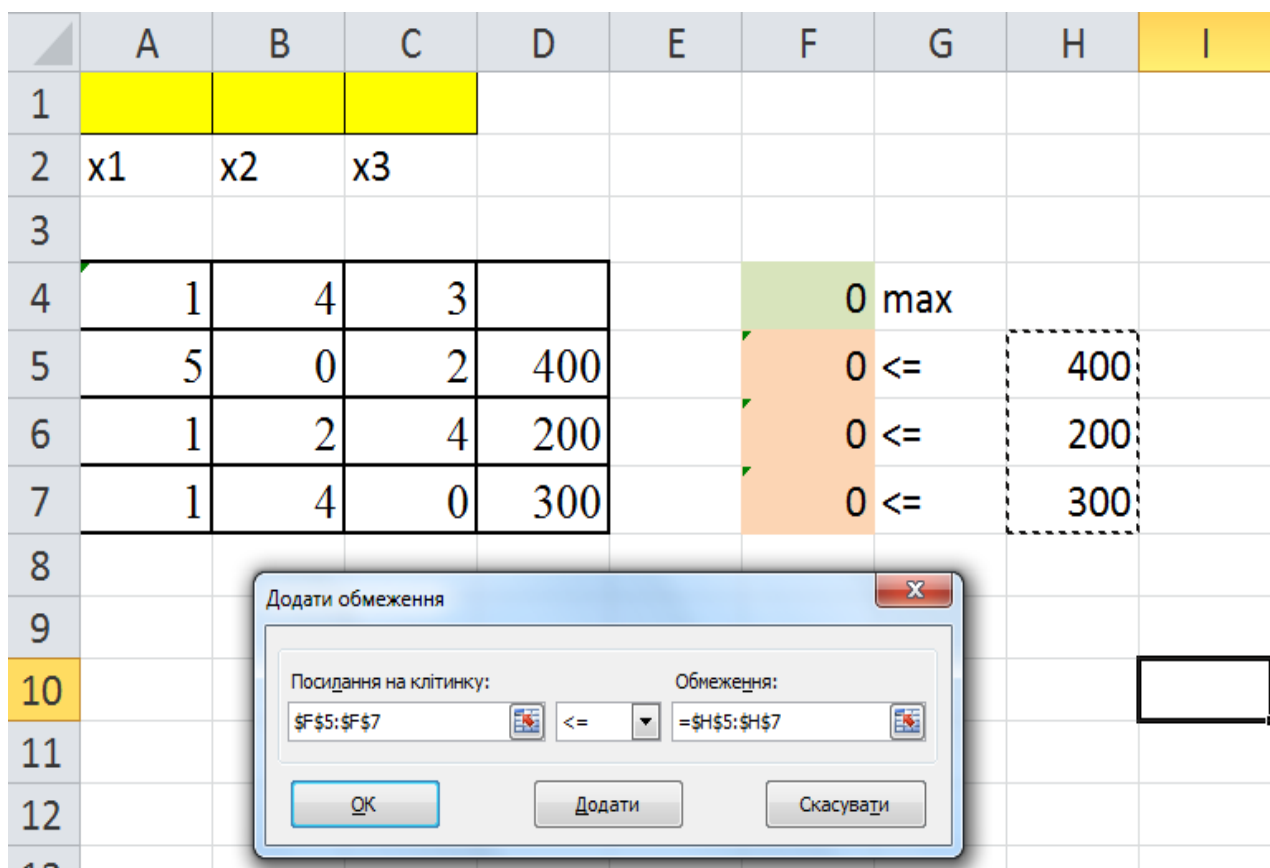


Рисунок 10 – Додавання групи однотипних обмежень

Далі встановлюємо умову невід'ємності для змінних, ставлячи відмітку навпроти «Зробити необмежені змінні не від'ємними» (рис. 11). Необхідно зауважити, що у цьому випадку при подальшій роботі з файлом у версіях до 2010 року ця опція втрачає силу. Крім того, якщо деякі змінні є необмеженими на знак, тоді відмітку необхідно зняти і для невід'ємних змінних умова невід'ємності вводиться подібно до функціонального обмеження: у полі ліворуч записуємо посилання на клітинку з потрібною змінною, у полі праворуч вписуємо 0 і далі обираємо тип обмеження – « \geq » (якщо змінна має бути недодатною, тоді обираємо « \leq »).

Нижче для розв'язування даної моделі обираємо симплекс-метод. Для цього зі списку «Виберіть метод розв'язання» обираємо пункт «За симплекс-методом».

Параметри розв'язувача

Оптимізувати цільову функцію:

До: ☒ Максимум ☐ Мінімум ☐ Значення:

Змінюючи клітинки змінних:

Підлягає обмеженням:

☒ Зробити необмежені змінні не від'ємними

Виберіть метод розв'язання:

Метод розв'язання

Для розв'язання гладких нелінійних задач виберіть розв'язувач нелінійних задач за методом зведеного градієнта. Для розв'язання лінійних завдань виберіть розв'язувач за симплекс-методом, для негладких завдань виберіть розвиваний розв'язувач.

Рисунок 11 – Головне діалогове вікно «Розв'язувача» з введеною моделлю

Таким чином математична модель, яку показано на рис.11, є повністю готовою для розв'язання. Залишається лише натиснути на кнопку «Розв'язати», яка знаходиться внизу основного діалогового вікна надбудови «Розв'язувач». За допомогою обраного методу програма знайде розв'язок задачі, після чого в інформаційному вікні з'явиться інформація про результати пошуку розв'язку (рис. 12), а значення змінних з'являться у відповідних клітинках (A1:C1) робочої області.

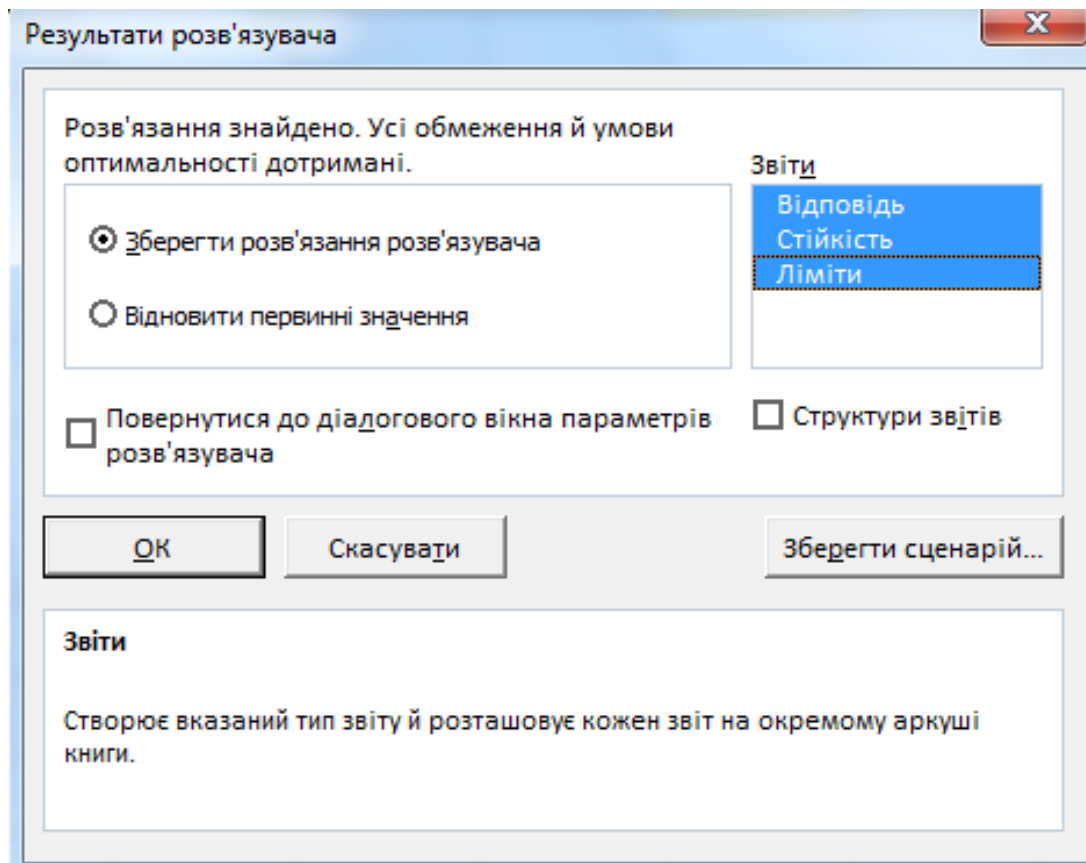


Рисунок 12 – Вікно з інформацією про результат

Оптимальне значення цільової функції відобразиться в клітинці F4, а значення лівих частин функціональних обмежень – в клітинках F5:F7 (рис. 13).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	75	12,5					
2	x1	x2	x3					
3								
4	1	4	3			337,5	max	
5	5	0	2	400		25	<=	400
6	1	2	4	200		200	<=	200
7	1	4	0	300		300	<=	300
8								

Рисунок 13 – Робочий аркуш з оптимальним розв'язком

Якщо, крім знаходження оптимальних значень змінних моделі необхідно зробити більш детальний аналіз розв'язку, тоді у вікні, що на рис. 12, обирається потрібний звіт серед наступних : «Відповідь», «Стійкість», «Ліміти». Обра-

ний звіт з'являється у вигляді окремого аркуша Excel, і його назва в цілому відповідає назві звіту.

5. ЗВІТ ПРО РЕЗУЛЬТАТИ

На рис. 14 показано, як виглядає звіт «Відповідь» (автоматично формується на аркуші «Звіт про результати 1»).

У верхній частині аркуша цього звіту вказано версію Excel (рядок 1), назву документа та аркуша (рядок 2), дату та час створення звіту (рядок 3), результати (рядок 4) та параметри розрахунку (рядки 5–11).

У таблиці «Клітинка цільової функції» (рядки 15–16) вказано напрям оптимізації (максимум), адреса клітинки з цільовою функцією на основному аркуші (\$F\$4), назва (в даному прикладі для клітинки назву не задано), вихідне значення (0), остаточне значення (337,5 – оптимальне значення цільової функції).

Нижче у таблиці «Клітинки змінних» (рядки 20–23) вказано адреси клітинок зі змінними (\$A\$1, \$B\$1, \$C\$1 – у стовпчику «Клітинки»), назви цих клітинок (в даному прикладі для клітинок назву не задано), вихідне значення (нулі), остаточні значення ($x_1 = 0$, $x_2 = 75$, $x_3 = 12,5$ – оптимальні значення змінних). В останньому стовпчику з назвою «Ціле число» цієї таблиці вказано тип змінних. Слово «Продовжити» тут означає, що змінні можуть приймати нецілі значення.

У останній таблиці «Обмеження» (рядки 27–30) у першому стовпчику вказано адреси клітинок з лівими частинами обмежень (\$F\$5, \$F\$6, \$F\$7), у другому – назва цих клітинок (у даному прикладі для клітинок назву не задано), у третьому – остаточні значення лівих частин (25, 200, 300), у четвертому – формула для кожного функціонального обмеження, у п'ятому – чи є вплив обмеження на оптимальний розв'язок (Зв'язування), чи ні (Без зв'язування), і у шостому – на скільки потрібно змінити праву частину, щоб обмеження мало вплив на оптимальний розв'язок (375 для першого обмеження, і нулі – для другого та третього обмежень, що відповідає значенню «Зв'язування» попереднього стовпчика).

	A	B	C	D	E	F	G																								
1	Microsoft Excel 14.0 Звіт про результати																														
2	Аркуш: [Тіньові ціни.xls]Sheet1																														
3	Звіт створено: 06.06.2016 11:19:00																														
4	Результат: Розв'язання знайдено. Усі обмеження й умови оптимальності дотримані.																														
5	Модуль розв'язувача																														
6	Модуль: За симплекс-методом																														
7	Час розв'язання: 0 Секунди.																														
8	Ітерації: 2 Підзадачі: 0																														
9	Параметри модуля розв'язувача																														
10	Максимальний час Без обмежень, Ітерації Без обмежень, Precision 0,000001																														
11	Максимальна кількість підзадач: Без обмежень, Максимальна кількість																														
12	цілочислових розв'язань Без обмежень, Похибка цілого числа 1%, Вважати не																														
13	від'ємним																														
14	Клітинка цільової функції (Максимум)																														
15	<table><tr><th>Клітинка</th><th>Назва</th><th>Вихідне значення</th><th>Остаточне значення</th></tr><tr><td>\$F\$4</td><td></td><td>0</td><td>337,5</td></tr></table>							Клітинка	Назва	Вихідне значення	Остаточне значення	\$F\$4		0	337,5																
Клітинка	Назва	Вихідне значення	Остаточне значення																												
\$F\$4		0	337,5																												
16																															
17																															
18																															
19	Клітинки змінних																														
20	<table><tr><th>Клітинка</th><th>Назва</th><th>Вихідне значення</th><th>Остаточне значення</th><th>Ціле число</th></tr><tr><td>\$A\$1</td><td></td><td>0</td><td>0</td><td>Продовжити</td></tr><tr><td>\$B\$1</td><td></td><td>0</td><td>75</td><td>Продовжити</td></tr><tr><td>\$C\$1</td><td></td><td>0</td><td>12,5</td><td>Продовжити</td></tr></table>							Клітинка	Назва	Вихідне значення	Остаточне значення	Ціле число	\$A\$1		0	0	Продовжити	\$B\$1		0	75	Продовжити	\$C\$1		0	12,5	Продовжити				
Клітинка	Назва	Вихідне значення	Остаточне значення	Ціле число																											
\$A\$1		0	0	Продовжити																											
\$B\$1		0	75	Продовжити																											
\$C\$1		0	12,5	Продовжити																											
21																															
22																															
23																															
24																															
25																															
26	Обмеження																														
27	<table><tr><th>Клітинка</th><th>Назва</th><th>Значення клітинки</th><th>Формула</th><th>Стан</th><th>Допуск</th></tr><tr><td>\$F\$5</td><td></td><td>25</td><td>\$F\$5<=\$H\$5</td><td>Без зв'язування</td><td>375</td></tr><tr><td>\$F\$6</td><td></td><td>200</td><td>\$F\$6<=\$H\$6</td><td>Зв'язування</td><td>0</td></tr><tr><td>\$F\$7</td><td></td><td>300</td><td>\$F\$7<=\$H\$7</td><td>Зв'язування</td><td>0</td></tr></table>							Клітинка	Назва	Значення клітинки	Формула	Стан	Допуск	\$F\$5		25	\$F\$5<=\$H\$5	Без зв'язування	375	\$F\$6		200	\$F\$6<=\$H\$6	Зв'язування	0	\$F\$7		300	\$F\$7<=\$H\$7	Зв'язування	0
Клітинка	Назва	Значення клітинки	Формула	Стан	Допуск																										
\$F\$5		25	\$F\$5<=\$H\$5	Без зв'язування	375																										
\$F\$6		200	\$F\$6<=\$H\$6	Зв'язування	0																										
\$F\$7		300	\$F\$7<=\$H\$7	Зв'язування	0																										
28																															
29																															
30																															

Рисунок 14 – Звіт про результати

6. ЗВІТ ПРО СТІЙКІСТЬ

На рис. 15 показано, як виглядає звіт «Стійкість» (автоматично формується на аркуші «Звіт про стійкість 1»).

У верхній частині вказано атрибути звіту – версія MS Excel (14.0) (рядок 1), назва файлу (*Тіньові ціни.xls*) та аркуш, на якому записано модель (рядок 2) і час створення звіту (рядок 3). Основні дані цього звіту наведено у таблицях нижче на цьому ж рис. 15.

У таблиці «Клітинки змінних» (рядки 7–11) записано результати аналізу для змінних і коефіцієнтів цільової функції. У перших трьох стовпчиках повторено результати попереднього звіту. У четвертому стовпчику вказано вели-

чину (0,375), на яку значення коефіцієнта при невідомій змінній є меншим від граничного значення, перевищення якого призведе до того, що оптимальне значення для такої змінної стане більшим за нуль за умови збереження всіх інших параметрів моделі незмінними; тобто, для змінних з оптимальним значенням, що відмінні від нуля, зменшена вартість дорівнює нулю, а для змінних з нульовим оптимальним значенням вона дорівнює припустимому збільшенню коефіцієнта при цій змінній в цільовій функції (див. шостий стовпчик цієї таблиці). У п'ятому стовпчику для зручності співставлення вказано поточні значення коефіцієнтів цільової функції.

Найважливіші результати в даній таблиці знаходяться у двох останніх стовпчиках. У шостому стовпчику вказано максимальне припустиме збільшення, а у сьомому – максимальне припустиме зменшення коефіцієнта при змінній в цільовій функції, за якого координати оптимальної точки залишаються незмінними, якщо всі інші параметри моделі залишаються незмінними.

На рис. 15 цього ж звіту у таблиці «Обмеження» (рядки 14–18) записано інформацію, що має відношення до обмежень моделі, розв'язку двоїстої задачі і пов'язаного з цим аналізу.

У перших трьох стовпчиках повторено результати з однойменної таблиці попереднього звіту.

У четвертому стовпчику для трьох наших ресурсів вказано «тіньові ціни», вони ж – оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Значення 0 в першому рядку (клітинка E16) вказує на те, що зміна кількості одиниць першого виду ресурсу не призведе до збільшення прибутку. Значення 0,75 у другому рядку (клітинка E17) означає, що збільшення на одиницю (з 200 до 201) другого ресурсу призведе до збільшення загального прибутку на 0,75 умовних грошових одиниць, якщо інші параметри моделі залишаться без змін. Так само значення 0,625 у третьому рядку (клітинка E18) означає, що збільшення на одиницю (з 300 до 301) третього ресурсу призведе до збільшення загального прибутку на 0,625 умовних грошових одиниць, якщо інші параметри моделі залишаться без змін.

У п'ятому стовпчику для зручності аналізу записано значення вільних членів правих частин обмежень, у нашому випадку це доступна кількість оди-

ниць ресурсів. Якщо у клітинці, що відповідає правій частині обмеження, знаходитиметься вираз, тоді значення у цьому стовпчику дорівнюватимуть нулю.

У останніх двох стовпчиках таблиці «Обмеження» знаходиться інформація, що дозволяє встановлювати межі застосування «тіньових цін» з четвертого стовпчика для визначення зміни оптимального значення цільової функції.

У шостому, передостанньому стовпчику знаходяться значення кількості одиниць ресурсу, на яке можна збільшити наявну кількість ресурсу, без зміни координат оптимальної точки і з можливістю використовувати «тіньові ціни» для визначення зміни загального прибутку.

У сьомому, останньому стовпчику знаходяться значення кількості одиниць ресурсу, на яке можна зменшити наявну кількість ресурсу, без втрати можливості використовувати «тіньові ціни» для визначення зміни загального прибутку.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 14.0 Звіт про стійкість							
2	Аркуш: [Тіньові ціни.xls]Sheet1							
3	Звіт створено: 06.06.2016 11:19:01							
6	Клітинки змінних							
7		Остаточне			Цільова функція		Припустиме	
8		Клітинка	Назва	Значення	Вартість	Коефіцієнт	Збільшення	Зменшення
9		\$A\$1		0	-0,375	1	0,375	1E+30
10		\$B\$1		75	0	4	1E+30	1,5
11		\$C\$1		12,5	0	3	5	3
13	Обмеження							
14		Остаточне		Тінь	Обмеження		Припустиме	
15		Клітинка	Назва	Значення	Ціна	Права сторона	Збільшення	Зменшення
16		\$F\$5		25	0	400	1E+30	375
17		\$F\$6		200	0,75	200	750	50
18		\$F\$7		300	0,625	300	100	300

Рисунок 15 – Звіт про стійкість

Значення 1E+30 у передостанньому стовпчику першого рядка останньої таблиці звіту на рис. 15 відповідає числу 10^{30} і означає, що отримані значення «тіньових» цін можна використовувати при необмеженому збільшенні першого

ресурсу. Присутність такого великого значення у таблиці пояснюється тим, що для формування звіту розробники надбудови не передбачили знак « ∞ » (нескінченність).

Загальну зміну прибутку можна знайти за формулою

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^m \Delta b_i y_i^* , \quad (1)$$

де y_i^* – «тіньова» ціна i -го ресурсу;

Δb_i – величина зміни кількості i -го ресурсу;

m – кількість видів ресурсів.

Достовірність цієї формули гарантована, якщо в цілому величини зміни кількості ресурсів не перевищують сумарно 100 % від максимально припустимих значень змін кількості ресурсів. Тому правомірність застосування формули (1) у випадку, коли максимально припустима зміна для кожного ресурсу строго більше нуля, можна визначити за наступним критерієм:

$$\sum_{i=1}^m k_i \leq 1 ,$$

$$k_i = \begin{cases} \frac{\Delta b_i}{\Delta b_i^+}, \Delta b_i > 0 \\ \frac{-\Delta b_i}{\Delta b_i^-}, \Delta b_i < 0 \\ 0, \quad \Delta b_i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Delta b_i^+ > 0 \quad \Delta b_i^- > 0 ,$$

де Δb_i^+ – максимально припустиме збільшення i -го ресурсу (передостанній стовпчик таблиці «Обмеження» звіту про стійкість);

Δb_i^- – максимально припустиме зменшення i -го ресурсу (останній стовпчик таблиці «Обмеження» звіту про стійкість);

Δb_i – кількість одиниць, на яку змінюється загальна кількість i -го ресурсу ($\Delta b_i > 0$, якщо кількість i -го ресурсу збільшується, $\Delta b_i < 0$ – якщо зменшується).

Приклад 1. Продовжимо розгляд задачі. Нехай відбулися такі зміни:

- 1) кількість 1-го ресурсу зменшилася на 75 одиниць;
- 2) кількість 2-го ресурсу збільшилася на 450 одиниць.

За критерієм (2), для першого ресурсу зміна становить 20 % від максимально припустимого зменшення, тобто $75/375=0,2$, для другого ресурсу – 60 % від максимально припустимого збільшення, тобто $450/750=0,6$ (див. передостанній і останній стовпчики таблиці «Обмеження» на рис. 15). Отже, сумарно зміни не перевищують 100 % ($20 \% + 60 \% < 100 \%$) і для визначення зміни прибутку можна використовувати формулу (1).

Це не означає, що якщо зміни у кількості ресурсів не задовольняють критерію (2), формула (1) не є вірною. Щоправда, у цьому випадку немає 100 % гарантії, що поточні значення «тіньових» цін відповідають формулі (1).

Приклад 2. Розглянемо випадок, коли в задачі кількість другого ресурсу збільшилася з 200 до 800 (збільшення на 600 одиниць, що становить 80 % від максимально припустимого збільшення), а третього – з 300 до 350 (збільшення на 50 одиниць, що становить 50 % від максимально припустимого збільшення). Критерій (2) не виконується ($130 \% > 100 \%$). Проте знайдене за допомогою (1) з поточними «тіньовими» цінами збільшення прибутку відповідатиме різниці прибутків для розв’язків задач з новими і старими значеннями кількості ресурсів.

Приклад 3. Якщо в задачі зменшити кількість другого ресурсу з 200 до 170 (зменшення на 30 одиниць, що становить 60 % від максимально припустимого зменшення), а третього – збільшити зі 100 до 180 (збільшення на 80 одиниць, що становить 80 % від максимально припустимого збільшення), що в сумі становить 140 %, тоді загальний прибуток збільшиться на 2,5 одиниці, тоді як формула (1) дасть збільшення на 27,5 одиниць. В даному випадку порушення критерію (2) не дало змоги використовувати поточні «тіньові» ціни. У цьому випадку потрібно розв’язувати задачу з такою зміною кількості ресурсів з самого початку.

7. ЗВІТ ПРО ЛІМІТИ

Останній звіт – звіт про ліміти повторює дані попередніх звітів (автоматично формується на аркуші «Звіт про ліміти 1»), за виключенням центральної таблиці (рис. 16). У ній показано значення цільової функції у випадку, якщо у неї замість змінної, що відповідає даному рядку, підставити нуль, а замість інших змінних – їхні оптимальні значення. Завдяки цьому можна дізнатися про те, внесок яких змінних в оптимальне значення цільової функції є несуттєвим. У зв'язку з тим, що ці результати легко отримати за допомогою вже відомого оптимального розв'язку, важливість даного звіту є незрівнянно меншим, ніж звіту про стійкість.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Microsoft Excel 14.0 Звіт про ліміти									
2	Аркуш: [Тіньові ціни.xls]Sheet1									
3	Звіт створено: 06.06.2016 11:19:01									
4										
5										
6	Цільова функція									
7	Клітинка Назва Значення									
8	\$F\$4 337,5									
9										
10										
11	Змінна					Нижній Цільова функція		Верхній Цільова функція		
12	Клітинка Назва Значення					Ліміт Результат		Ліміт Результат		
13	\$A\$1 0					0 337,5		0 337,5		
14	\$B\$1 75					0 37,5		75 337,5		
15	\$C\$1 12,5					0 300		12,5 337,5		

Рисунок 16 – Звіт про ліміти

8. НЕОБМЕЖЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ ЗНАЧЕННЯ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Розглянемо випадок, коли у задачі другий і третій ресурси стали необмеженими. Тоді з моделі вилучаються друге і третє обмеження. Для цього не обов'язково вилучати рядки 6 і 7 з робочого аркуша. Достатньо вилучити ці обмеження зі списку обмежень у діалоговому вікні надбудови Solver за допомогою кнопки «Видалити». У списку функціональних обмежень тоді залишиться лише перше обмеження (рис. 17).

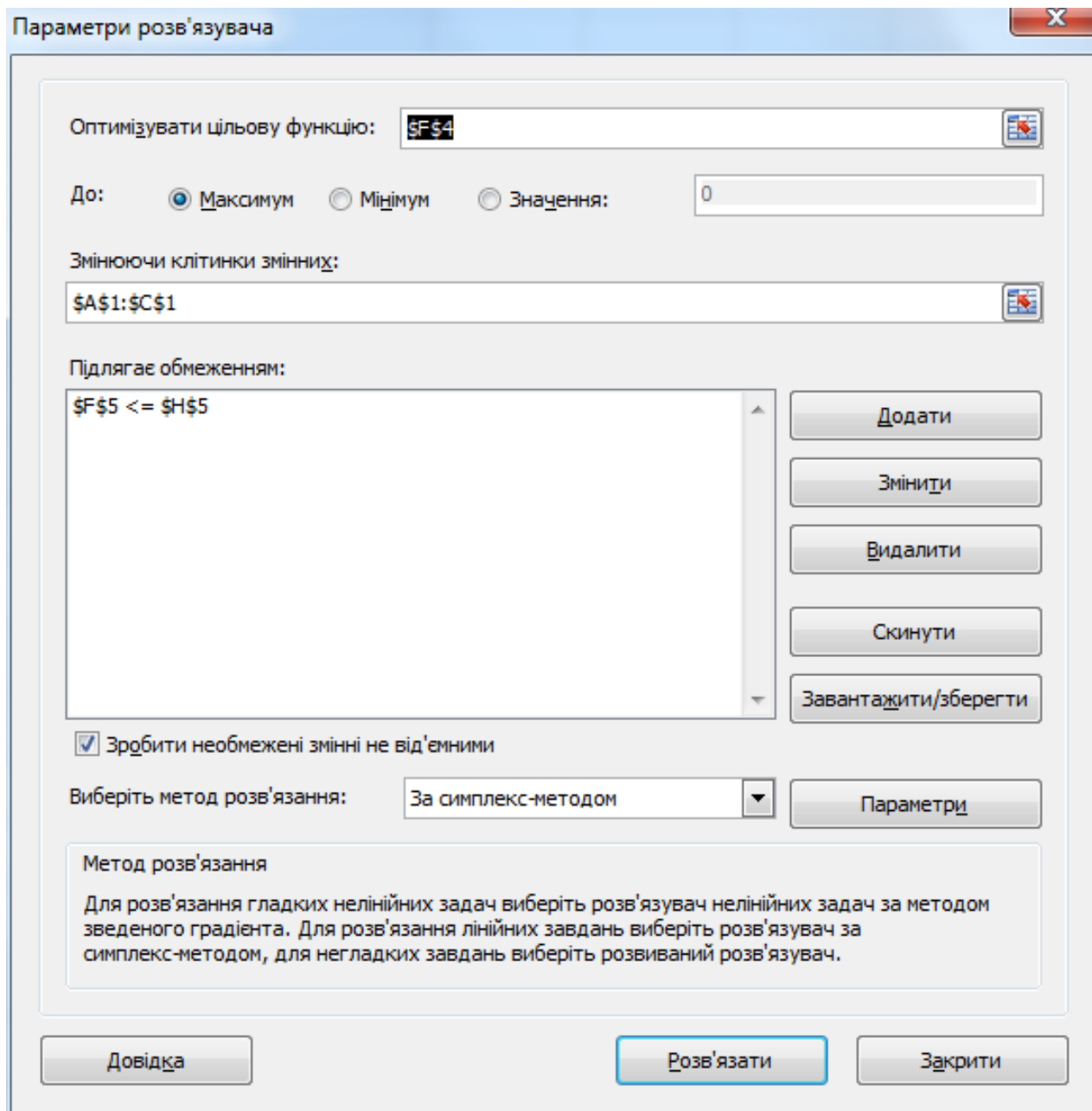


Рисунок 17 – Діалогове вікно надбудови з одним обмеженням

Результат про розв'язування такої моделі з'явиться у вікні, що подано на рис. 18.

Для цієї задачі Excel видасть попередження з червоним знаком оклику про те, що «розв'язувач може встановити значення клітинки цільової функції настільки великим (або малим), наскільки потрібно». Це означає, що оптимальне значення цільової функції необмежене, оскільки обмеження задачі є занадто м'якими, а, отже, потребують перегляду і/або доповнення.

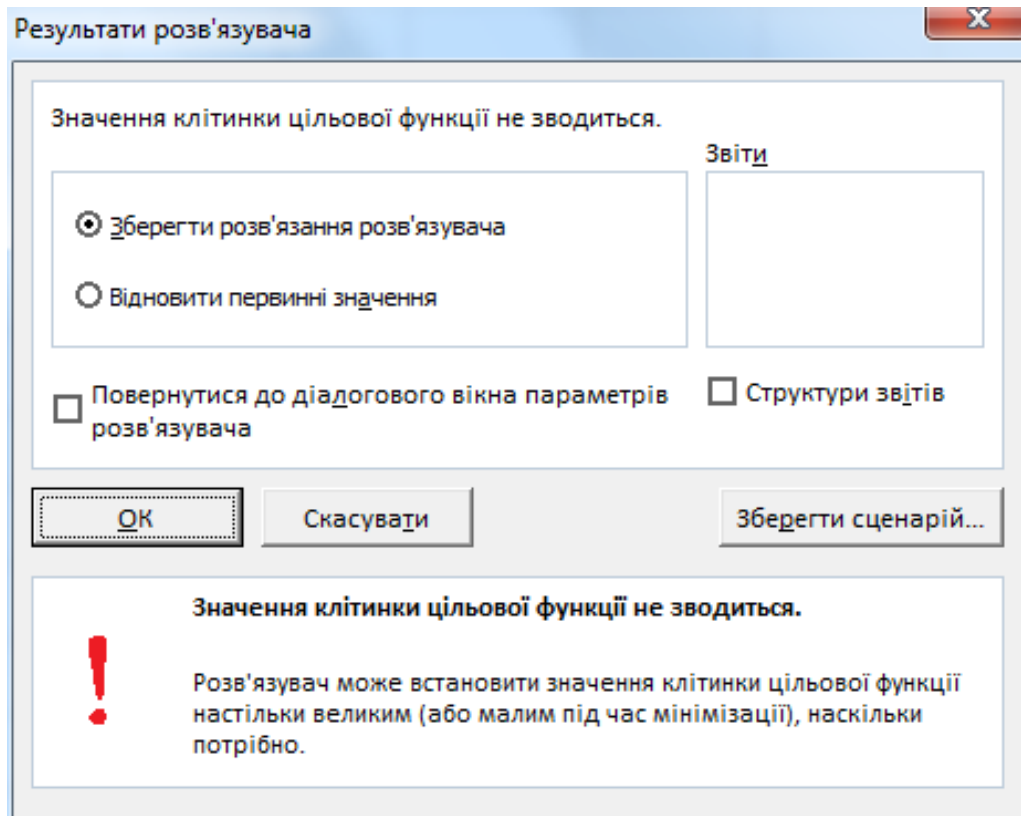


Рисунок 18 – Вікно з інформацією про результат

У версіях Excel до 2010 року програма намагалася у цьому випадку віднайти оптимальний розв'язок і зупиняла пошук при досягненні максимально допустимих значень для клітинок. Внаслідок цього у клітинках зі змінними і у цільовій клітинці з'являлися величезні за абсолютним значенням числа, що давало змогу встановлювати факт необмеженості оптимального значення цільової функції, не звертаючи увагу на інформаційне вікно. У новіших версіях, починаючи з 2010 року, в цих клітинках залишаються початкові значення, то ж необхідно зважати на результати інформаційного вікна, такого, як на рис. 18.

9. ВІДСУТНІСТЬ ДОПУСТИМИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Розглянемо випадок, коли до умови задачі додається наступне обмеження: загальна кількість випущеної продукції має бути не менше ніж 1000 одиниць. Така умова запишеться за допомогою обмеження:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1000 .$$

Додаємо коефіцієнти лівої частини обмеження в клітинки A9:C9, праву частину – в H9, а вираз для лівої частини – в F9, після чого викликаємо надбудову «Розв’язувач» і додаємо це обмеження до списку, після чого розв’язуємо. Результат отримаємо такий, як на рис. 19.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	78,95	55,26	2,632						
2	x1	x2	x3						
3									
4	1	4	3			228,9	max		
5	5	0	2	400		400	<=	400	
6	1	2	4	200		200	<=	200	
7	1	4	0	300		300	<=	300	
8									
9	1	1	1	1000		136,8	>=	1000	
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									

Результати розв’язувача

Розв’язувачу не вдалося знайти допустиме розв’язання

☒ Зберегти розв’язання розв’язувача
☐ Відновити первинні значення

☐ Повернутися до діалогового вікна параметрів розв’язувача
☐ Структури звітів

Звіти
Допустимість
Межі допустимості

ОК Скасувати Зберегти сценарій...

! Розв’язувачу не вдалося знайти допустиме розв’язання

Розв’язувачу не вдалося знайти точку, для якої дотримуються всі обмеження.

Рисунок 19 – Результат розв’язання задачі

Програма намагалася розв’язати задачу – це видно по ненульовим значенням у клітинках A1:C1 на рис. 19. Проте, як видно з інформаційного вікна, розв’язувачу не вдалося знайти жодного допустимого розв’язку. Це ще раз нагадує про необхідність звертати увагу на інформаційне вікно з результатами розв’язувача.

10. МНОЖИНА ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

У оптимізаційних задачах може бути не один, а багато оптимальних розв'язків. Тоді у звіті на стійкість (рис. 15) у двох крайніх правих стовпчиках першої таблиці (Припустимо збільшення/зменшення) обов'язково буде принаймні один нуль. Якщо ж нульових значень в цих стовпчиках немає, тоді задача гарантовано має єдиний оптимальний розв'язок.

11. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Задача 1. Дана модель задачі лінійного програмування:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 \leq 40 \\ 3x_1 + x_2 \leq 27 \\ x_1 + 4x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

- а) знайти оптимальний розв'язок за допомогою «Розв'язувача»;
- б) знайти тіньові ціни та діапазон їхнього застосування за допомогою звітів.

Задача 2. Дана модель задачі лінійного програмування:

$$Z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 40 \\ 3x_1 + x_2 \geq 27 \\ x_1 + 4x_2 \geq 30 \end{cases}$$

- а) знайти оптимальний розв'язок за допомогою «Розв'язувача»;
- б) за допомогою звіту про стійкість встановити, чи отриманий оптимальний розв'язок єдиний.

Задача 3. Дана модель задачі лінійного програмування:

$$Z = x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 40 \\ 3x_1 + x_2 \geq 27 \\ x_1 + 4x_2 \geq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,$$

необхідно знайти оптимальний розв'язок за допомогою «Розв'язувача».

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів спеціальностей 6.03060101 «Менеджмент організацій» та 6.03060102 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» / Укладач О. Б. Білоцерківський. – Харків: НТУ «ХП», 2014. – 40 с.
2. Білоцерківський О. Б. Економіко-математичне моделювання: текст лекцій / О. Б. Білоцерківський, О. О. Замула, Н. В. Ширяєва. – Харків: НТУ «ХП», 2010. – 108 с.
3. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці: навч. посіб. / О.В. Боровик. – Київ: Центр учбової літератури, 2007. – 424 с.
4. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій : підручник / Ю.П. Зайченко. – Київ: ВІПОЛ, 2000.
5. Мур Д. Х. Экономическое моделирование в *Microsoft Excel* / Д. Х. Мур, Л. Р. Уэдерфорд. – Москва: Вильямс, 2004. – 1024 с.
6. Hillier F.S., Lieberman G.J., Introduction to operations research, 7-th edition. – New York: McGraw-Hill Higher Education, 2001. – 1237 P.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. Постановка задачі про оптимальний план випуску продукції	4
2. Формулювання математичної моделі задачі	5
3. Перший спосіб запису моделі в Excel.....	6
4. Другий спосіб запису моделі в Excel	10
5. Звіт про результати	17
6. Звіт про стійкість.....	18
7. Звіт про ліміти	23
8. Необмежене оптимальне значення цільової функції	23
9. Відсутність допустимих розв'язків	25
10. Множина оптимальних розв'язків	27
11. Завдання для самостійної роботи	27
Список літератури	28

Навчальне видання

«РОБОТА З НАДБУДОВОЮ Solver MS Excel»
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи студентів
з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі»
для студентів денної та заочної форм навчання
спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Укладачі: ЗАМУЛА Олена Василівна
ЗАМУЛА Олексій Олександрович

Роботу до видання рекомендував проф. Міщенко В.А.
Редактор О.І. Шпільова

План 2019 р., поз. 193
Підп. до друку 02.07.2019. Гарнітура Таймс. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. – 1,2.

Видавничий центр НТУ «ХП».

61002.Х м. Харків, вул. Кирпичова, 2.

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Самостійне електронне видання